

Logique binaire

1. L'algèbre de Boole

L'algèbre de Boole est la partie des mathématiques, de la logique et de l'électronique qui s'intéresse aux opérations et aux fonctions sur les variables logiques. Le nom provient de George Boole. George Boole est le fondateur de la logique moderne. L'algèbre de Boole est une algèbre permettant de traduire des signaux (tout ou rien) en expressions mathématiques en remplaçant chaque signal élémentaire par des variables logiques et leur traitement par des fonctions logiques. L'algèbre de Boole permet de résoudre des équations logiques afin de réaliser des fonctions sur des signaux numériques. Ces fonctions seront appelées fonctions combinatoires.

L'algèbre de Boole des fonctions logiques permet de modéliser des raisonnements logiques, en exprimant un « état » en fonction de conditions. Un mathématicien britannique qui, durant le milieu du XIXe siècle, restructura complètement la logique en un système formel. Plus spécifiquement, l'algèbre booléenne permet d'utiliser des techniques algébriques pour traiter les expressions à deux valeurs de la logique des propositions.

Aujourd'hui, l'algèbre de Boole trouve de nombreuses applications en informatique et dans la conception des circuits électroniques.

2. Etat des contacts et des récepteurs.

Un circuit électrique, électronique ou pneumatique, peut avoir 2 états logiques. Ces états peuvent prendre les valeurs 1 ou 0. Ces états sont fonctions de l'état des composants en série dans le circuit.

Etat 0 :

Les actionneurs tels que : moteurs, vérins sont à l'état 0 lorsqu'ils ne sont pas alimentés. Le circuit est alors ouvert. Pour un circuit pneumatique ceci correspond à une absence de pression. Pour un circuit électrique cela correspond à une absence de différence de potentiel entre les bornes du circuit.

Pour un contact ou un distributeur, c'est l'absence d'action physique intervenant sur un contact qui représente l'état 0.

État 1 :

Les actionneurs sont à l'état 1 lorsqu'ils sont alimentés. Pour un circuit pneumatique ou hydraulique ceci correspond à une pression d'air ou d'huile dans le circuit. Pour un circuit électrique cela correspond à une différence de potentiel entre les bornes du circuit.

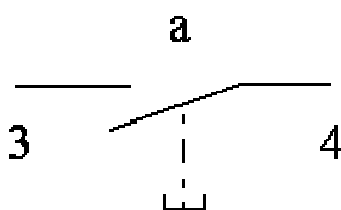
Pour un contact ou un distributeur ils sont actionnés, c'est à dire qu'une action physique est prise en compte.

3. Définitions :

Contact à fermeture

C'est un contact qui est normalement ouvert (Normally Open) au repos. Il se ferme lorsqu'il est actionné. On désigne ce type de contact par des lettres minuscules a, b, c... Ses bornes sont repérées par les chiffres 3 et 4.

Symbole :



Contact ouvert au repos (NO)

Contact à ouverture :

C'est un contact qui est normalement fermé (Normally Closed) au repos et qui s'ouvre lorsqu'il est actionné. On désigne ce type de contact par des lettres \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} (\bar{a} se lit "a barre"). Ses bornes sont repérées par les chiffres 1 et 2.

Symbole :



Contact fermé au repos (NC)

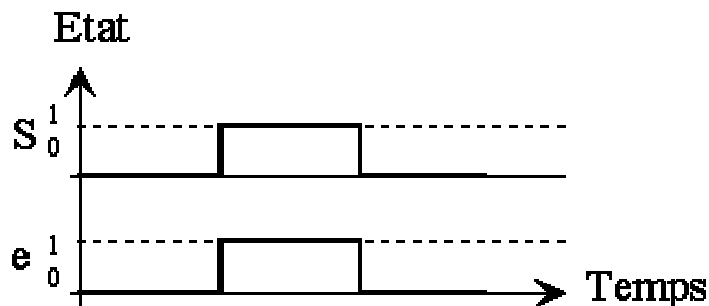
Etat d'un circuit électrique .

Un circuit électrique est dit passant, ou fermé, lorsqu'un courant électrique circule dans ce circuit. Cela implique qu'il y ait continuité de ce circuit, c'est à dire que le contact établit le circuit.

Un circuit électrique est non passant, ou ouvert, si le courant ne peut pas circuler dans ce circuit.

Chronogramme :

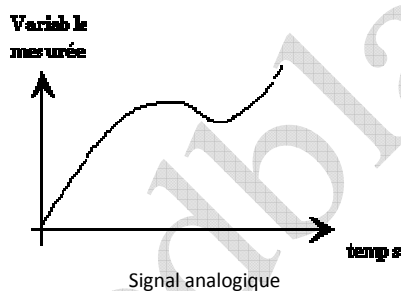
Un chronogramme est une représentation schématique temporelle de l'évolution d'un système automatisé en fonction des variations d'état d'une ou plusieurs entrées. Cette évolution est représentée sous la forme suivante :



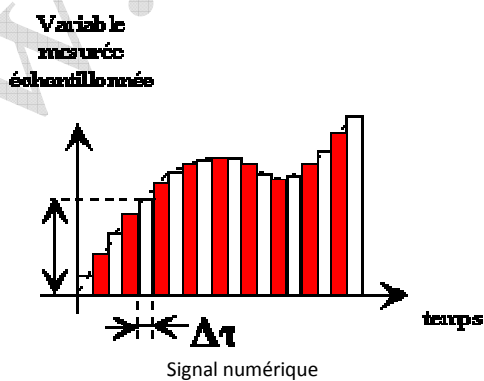
4. Différents types de signaux :

En automatique trois types de signaux sont utilisés principalement. Les signaux analogiques, numériques et tout ou rien.

Un signal analogique est un signal qui représente la variation continue d'une certaine grandeur (ex : température).



Un signal numérique est un signal qui représente la variation d'une grandeur par succession de valeurs discrètes (ex : une montre à affichage digital).



Un signal tout ou rien est un signal qui représente l'état binaire (vrai, non vrai) d'une variable d'un système (ex : un contacteur d'un circuit électrique est soit actionné soit non actionné).

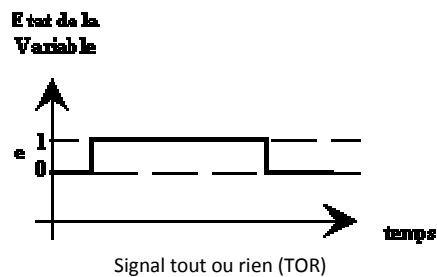


Table de vérité :

Une table de vérité est la représentation de l'évolution du comportement d'un système automatisé en fonction des variations de ses entrées. Chacune des variables est représentée sous une écriture binaire. Une table de vérité s'utilise principalement en logique combinatoire. Elle est représentée sous la forme suivante :

Variables d'entrée		Variable de sortie
a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

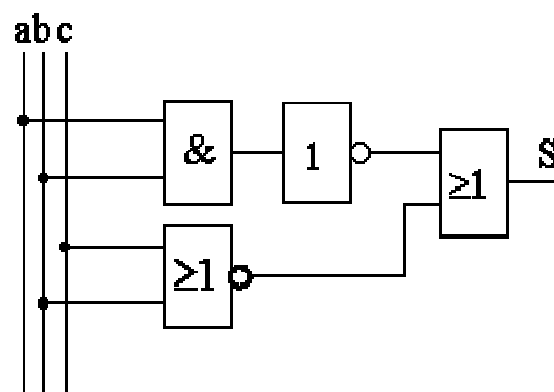
Evolution des variables d'entrée (grouped on the left)

Evolution de la variable de sortie (grouped on the right)

5. **Logigramme :**

Un logigramme est un schéma représentant une succession de symboles logiques permettant d'obtenir par combinaison de variables d'entrées la sortie recherchée. Attention, les fonctions logiques sont des opérateurs logiques et non des opérateurs mathématiques. Le résultat obtenu sera un résultat logique et non un résultat mathématique.

Exemple d'écriture :



Codes binaires :

Le code binaire pur :

Le code binaire pur est une représentation numérique en base deux. Cette représentation permet de représenter des nombres sous forme de 1 et de 0, ou de décrire l'évolution des variables vraies ou non vraies d'un système automatisé, c'est cette possibilité que nous allons utiliser. Le nombre de combinaisons possibles des variables se calcule de la façon suivante :

- 1 variable d'entrée $2^1 = 2$ combinaisons de sortie,
- 2 variables d'entrée $2^2 = 4$ combinaisons de sortie
- 3 variables d'entrée $2^3 = 8$ combinaisons de sortie
- 4 variables d'entrée $2^4 = 16$ combinaisons de sortie
- n variables d'entrée 2^n combinaisons de sortie

S.A à 1 variable

0
1

S.A à 2 variables

0	0
0	1
1	0
1	1

On retrouve la structure précédente en haut à droite de ce tableau, puis en dessous. La 2^{ème} variable prend 2 fois la valeur 0 puis 2 fois la valeur 1

S.A à 3 variables

0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

On retrouve la structure précédente en haut à droite de ce tableau puis en dessous. La 3^{ème} variable prend 4 fois la valeur 0 puis 4 fois la valeur 1

S.A à 4 variables

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

On retrouve la structure précédente en haut à droite de ce tableau puis en dessous, suivi de 8×0 et 8×1 pour la 4^{ème} variable.

Le code binaire réfléchi :

Lorsque l'on regarde ligne par ligne l'évolution du code binaire pur, on remarque que pour passer d'une ligne à l'autre, plusieurs variables peuvent être amenées à changer de valeur simultanément. Ceci est très gênant lorsque l'on cherche à analyser le comportement d'un système en fonction de ses entrées. Un autre code binaire a été mis au point, c'est le code binaire réfléchi ou code GRAY du nom de son inventeur. Ce code permet de passer d'une ligne à l'autre de la description d'un système avec l'évolution d'une seule variable à la fois. Ce code permettra de définir l'évolution d'un système automatisé. En aucun cas il ne pourra servir de base de comptage comme le binaire pur. On utilisera ce codage ultérieurement dans ce cours pour la définition des tableaux de Karnaugh.

Exemple :

Binaire pur :

0	0	0	1 changement
0	0	1	2 changements
0	1	0	1 changement
0	1	1	3 changements
1	0	0	1 changement
1	0	1	2 changements
1	1	0	1 changement
1	1	1	

Binaire réfléchi :

	c	a	
0	0	0	
0	0	1	1
0	1	1	
0	1	0	b
1	1	0	2
1	1	1	
1	0	1	
1	0	0	
	d	e	

Le binaire réfléchi est construit par symétrie de lignes.

Le groupement "a" est reproduit en "b" symétriquement par rapport à la ligne 1.

Les groupements "a" et "b" sont reproduits en "e" symétriquement par rapport à la ligne 2.

La même règle prévaut pour les groupements "c" et "d".

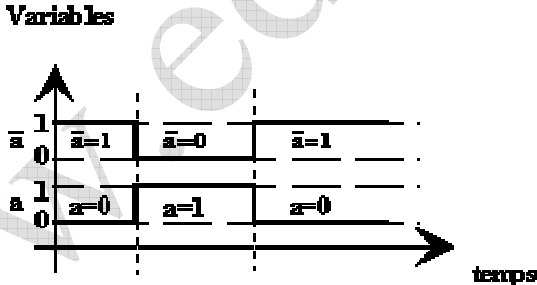
La suite se construit à l'identique.

On remarque alors qu'une seule variable, la variable rouge, évolue d'une ligne à l'autre.

Le complément d'une variable :

Nous avons vu précédemment qu'une variable "e" avait deux états, l'état 0 et l'état 1. Si on admet qu'il peut exister une variable " \bar{e} " qui a l'état inverse de la variable "e", alors on pourra dire que " \bar{e} " est le complément de "e".

Exemple :

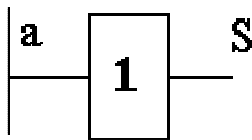


6. Fonctions logiques :

Les fonctions logiques sont des opérateurs logiques. C'est à dire qu'en fonction d'une ou plusieurs variables données, ils vont répondre par une sortie particulière. Le symbole " \equiv " se lit "équivalent" pour bien distinguer le résultat logique d'un résultat mathématique.

- a. Fonction OUI
Equation : $S \equiv a$
S reproduit la variable d'entrée a.

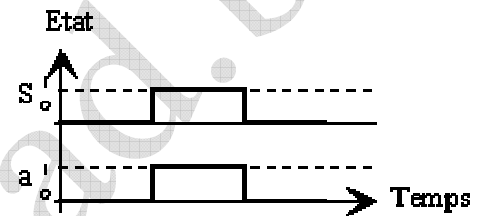
- Symbole logique :



- Table de vérité :

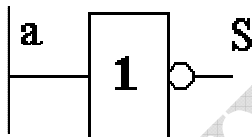
a	S
0	0
1	1

- Chronogramme :



- b. Fonction NON
Equation : $S \equiv \bar{a}$
S reproduit l'inverse de la variable d'entrée a.

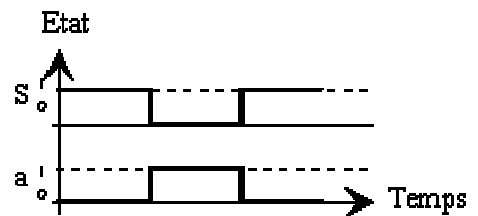
- Symbole logique :



- Table de vérité :

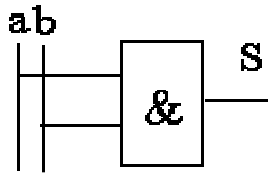
a	S
0	1
1	0

- Chronogramme :



- c. Fonction ET
Equation : $S \equiv a . b$
S reproduit le produit des variables d'entrée a et b.

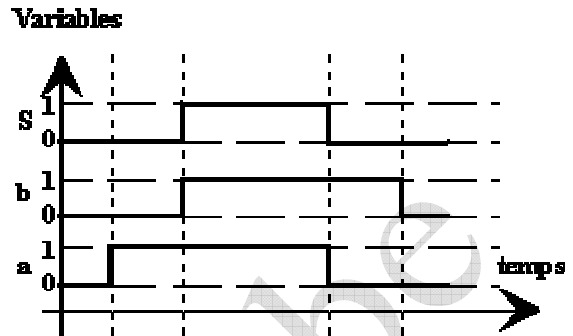
- Symbole logique :



- Table de vérité :

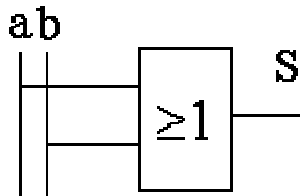
a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Chronogramme :



- d. Fonction OU
Equation : $S \equiv a + b$
S reproduit la somme logique des variables d'entrée a et b.

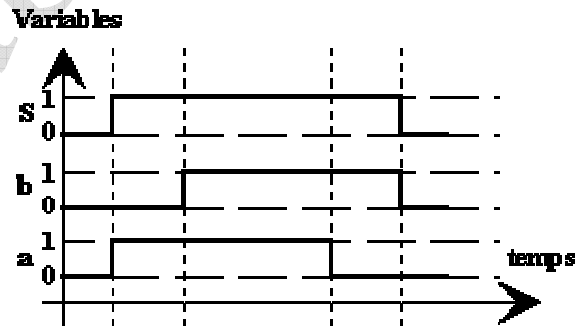
- Symbole logique :



- Table de vérité :

a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Chronogramme :

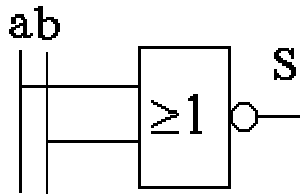


- e. Fonction NOR (Not OR , Non Ou)
Equation : $S \equiv \overline{a + b}$
S reproduit l'inverse de la somme logique des variables d'entrée a et b.. La fonction NOR (ou NI) est une fonction universelle, c'est à dire que les fonctions OUI, NON, OU, ET peuvent être réalisées avec uniquement des opérateurs NOR.

- Symbole logique :

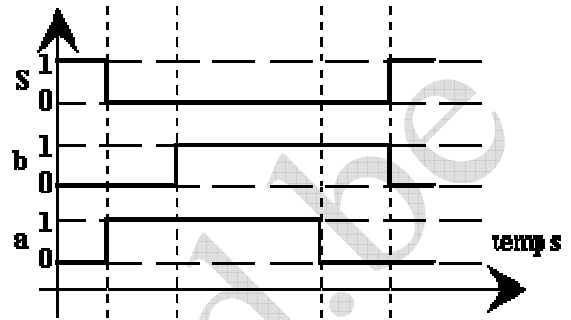
- Table de vérité :

- Chronogramme :



a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Variables



f.

Fonction NAND

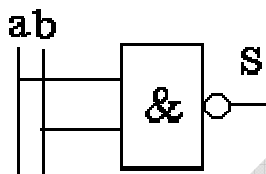
$$\text{Equation : } S \equiv \overline{a \cdot b}$$

S reproduit l'inverse du produit logique des variables d'entrée a et b. La fonction NAND est aussi une fonction universelle.

- Symbole logique :

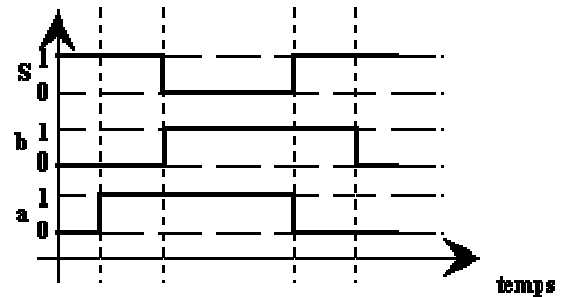
- Table de vérité :

- Chronogramme :



a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Variables



g.

Fonction Inhibition

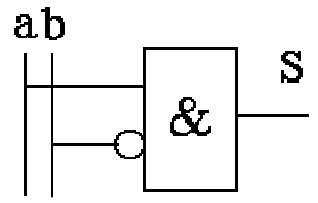
$$\text{Equation : } S \equiv a \cdot \overline{b}$$

S reproduit le produit logique d'une variable d'entrée a et du complément d'une variable d'entrée b.

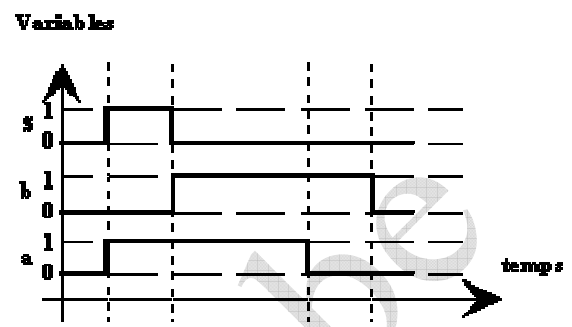
- Symbole logique :

- Table de vérité :

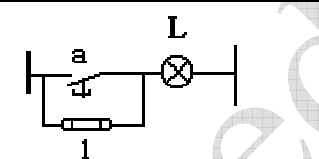
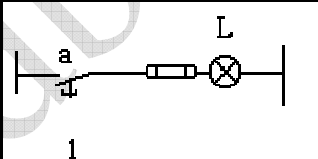
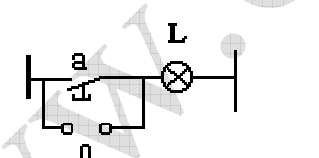
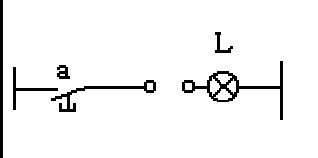
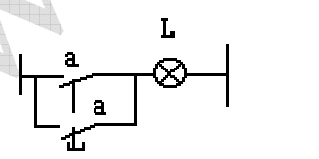
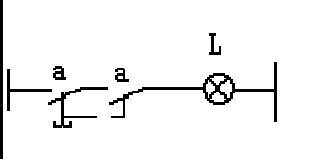
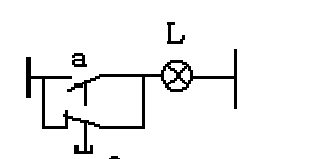
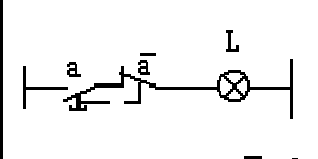
- Chronogramme :



a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0



7. Relations caractéristiques de la logique booléenne :

Sommes logiques	Produits logiques
 <p>$a + 1 = 1$</p>	 <p>$a . 1 = a$</p>
 <p>$a + 0 = a$</p>	 <p>$a . 0 = 0$</p>
 <p>$a + a = a$</p>	 <p>$a . a = a$</p>
 <p>$a + \bar{a} = 1$</p>	 <p>$a . \bar{a} = 0$</p>

8. Théorèmes d'Augustus De Morgan :

Le complément d'un produit logique de variables est égal à la somme logique des compléments de variables.

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

Le complément d'une somme logique de variables est égal au produit logique des compléments de variables.

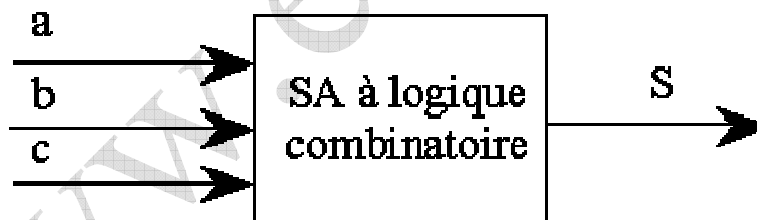
$$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

9. La logique combinatoire et la logique séquentielle :

La logique combinatoire :

C'est une logique de combinaison de variable, c'est à dire que pour une combinaison d'entrées donnée, il ne correspond qu'une et une seule sortie. Les différentes fonctions logiques utilisées jusqu'à maintenant fonctionnent en logique combinatoire.

Schéma :



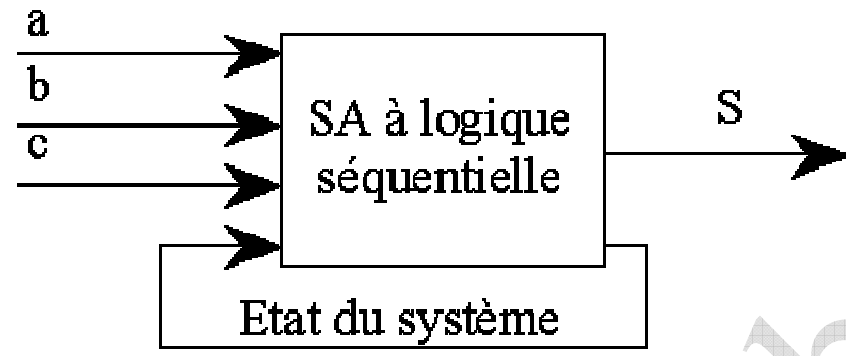
Exemple :

Lorsque le conducteur d'un véhicule fait un appel de phares, les phares resteront allumés tant que le conducteur appuiera sur la commande de phares. Nous sommes donc en présence d'un système combinatoire.

La logique séquentielle :

C'est une logique qui fait intervenir en plus de la combinaison de variables d'entrées donnée, l'état dans lequel se trouve le S.A à un instant donné. Une sortie ne sera donc plus accessible directement par une combinaison d'entrées, il faudra aussi que le système soit dans un état déterminé pour pouvoir atteindre la sortie que l'on souhaite. Le grafctet que nous étudierons dans un prochain chapitre fonctionne aussi en logique séquentielle.

Schéma :



La fonction mémoire :

La fonction mémoire est réalisée par un opérateur logique qui peut stocker une information jusqu'à ce que cette information soit effacée par une autre information. L'opération de stockage d'information s'appelle "SET" (Mise à un) l'opération d'effacement s'appelle "RESET" (Mise à zéro). Ces opérateurs peuvent être électriques, électroniques, pneumatiques...

Les bascules logiques sont les éléments les plus simples qui constituent les mémoires.

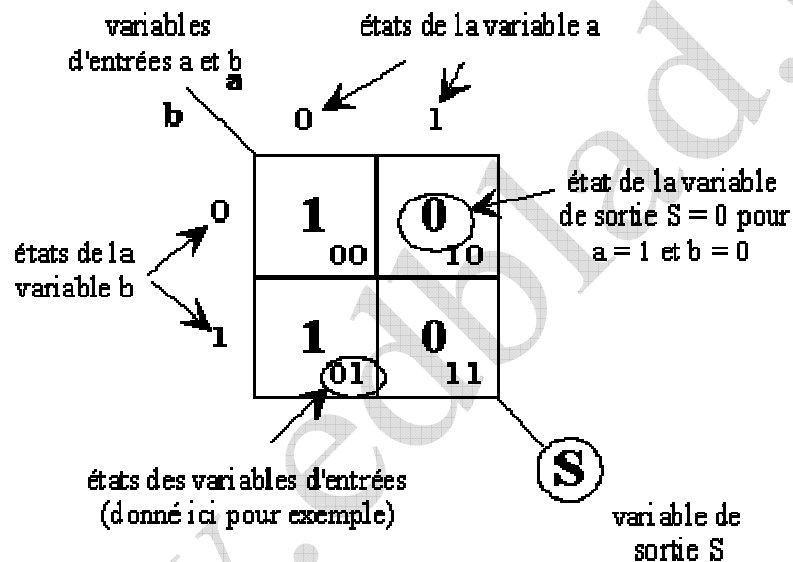
www.edblad.be

10. Notions de bascules :

Tableaux de Karnaugh :

Un tableau de Karnaugh est un tableau représentatif du comportement d'une variable. Ce tableau a pour but de simplifier l'écriture de l'équation de fonctionnement. Il est utilisé principalement en logique combinatoire. Dans ce tableau chaque case correspond à une combinaison d'entrées de la variable. Dans chaque case on reporte l'état de la variable [0,1].

Exemple :



La variable de sortie S est active dans deux cas. Les deux combinaisons de sortie sont respectivement pour a et b, [0,0] ou [0,1]. L'utilisation du tableau de Karnaugh permet de déterminer très rapidement l'équation de la variable S. Il faut rechercher les variables qui n'influencent pas le comportement de la variable de sortie. Dans notre exemple les 1 sont dans une colonne, le résultat va donc dépendre directement de la variable associée à cette colonne, ici "a". La variable de ligne n'a pas d'influence car quel que soit l'état de b (0 ou 1), la variable de sortie reste à 1. L'équation de sortie sera donc $S = \bar{a}$.

Lorsqu'un système présente 4 variables d'entrée le principe est le même.

Il faut remarquer la construction de ce tableau.

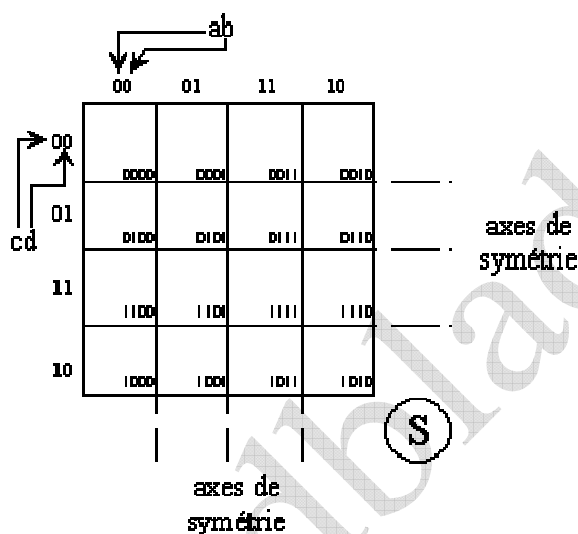
Sur l'exemple suivant, on remarque :

- que le code utilisé est le code binaire réfléchi, ceci est très important dans la mesure où l'on souhaite voir évoluer le comportement d'une sortie en fonction de plusieurs variables,
- qu'à chaque case correspond une équation de fonctionnement particulière,
- que ce tableau possède des axes de symétrie horizontaux et verticaux,

- et qu'enfin les colonnes ou les lignes extrêmes de ce tableau peuvent être virtuellement déplacées pour être mise côte à côte pour faciliter les regroupements dans la mesure ou une seule variable évolue d'une case à l'autre.

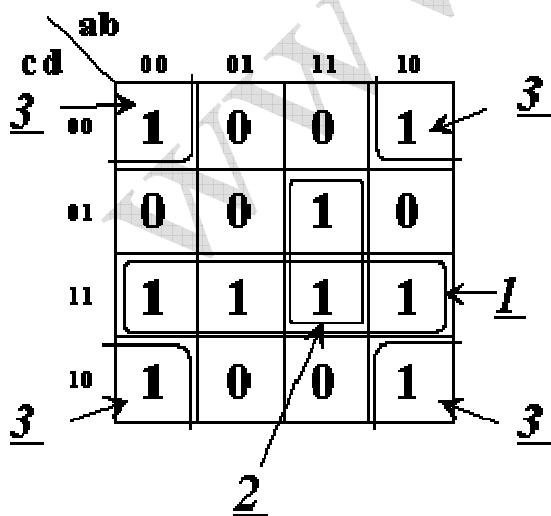
Exemple :

Pour passer de la première colonne du tableau $[a,b] \in [0,0]$ à la dernière colonne $[a,b] \in [1,0]$ seule la variable "a" a évolué.



Ce tableau doit être complété par l'état de la sortie à analyser. Une fois terminé on procédera par regroupement des cases indiquant des états identiques par rapport aux axes de symétrie.

Exemple :



Dans l'exemple ci-contre trois groupements sont possibles. Chacun d'entre eux va donner une partie de l'équation de fonctionnement de "S". Le groupement 1 se fait sur une ligne donc indépendamment de "a" ou de "b" puisque ces deux variables changent d'état successivement. L'équation de ce groupement est : "c.d". Le groupement 2 se fait sur une colonne et deux lignes l'équation va dépendre de "a, b, d" et pas de "c" puisque "c" change d'état entre les deux lignes sans influencer sur la sortie. L'équation de ce groupement est : "a.b.d".

Le groupement 3 se fait sur deux lignes et deux colonnes, ici ce cas est particulier puisque les cases ne sont pas contiguës, mais il est possible. L'équation va dépendre des variables "b, d" et non des variables a, c puisque ces variables changent d'état. L'équation de ce groupement est : "b.d".

L'équation de fonctionnement de S devient :

$$S \equiv cd + abd + \bar{b} \cdot \bar{d}$$

On constate, pour un tableau de 16 cases, qu'un regroupement de 2 cases donne un élément d'équation à 3 variables, qu'un regroupement de 4 cases donne un élément d'équation à 2 variables. On peut en conclure qu'un regroupement d'une seule case donnera un élément d'équation à 4 variables qu'un regroupement de 8 cases donnera un élément d'équation à 1 variable, qu'un regroupement de 16 cases donnera une équation de fonctionnement toujours vraie.

www.edblad.be